Defn

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

falls die Folge der

Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

konvergiert.

$$\lim S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bsp. ① Geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{konv. falls } |q|<1 \\ \text{div. falls } |q|>1 \end{cases}$$

② Harmonische Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

③ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} \text{konv. falls } s>1 \\ \text{div. falls } s<1. \end{cases}$$

* Notwendige Bedingung für

Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Bmk $\lim a_k = 0 \not\Rightarrow \sum a_k$ konv

Bsp $\sum \frac{1}{k}$

Kriterium für Konvergenz (Divergenz)

Satz (Cauchy Kriterium)

$\sum a_k$ konv $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$

s.d. $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

$\forall\, m \geq n \geq N.$

Satz (Majoranten oder Vergleich Kriterium)

Seien $\sum a_k, \sum b_k$ 2 Reihen mit

$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$

Dann gelten

1) $\sum b_k$ konv $\Rightarrow \sum a_k$ konv

2) $\sum a_k$ div $\Rightarrow \sum b_k$ div.

Satz Sei $a_k \geq 0$

$\sum a_k$ konv $\Leftrightarrow S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

ist noch oben beschrankt.

Defn Eine Reihe $\sum a_k$

konvergiert absolute falls

$\sum |a_k|$ konvergiert

Satz $\sum |a_k|$ konvergiert

$\Rightarrow \sum a_k$ konvergiert

Bmk $\sum a_k$ konv $\not\Rightarrow \sum |a_k|$ konv.

Defn Eine Reihe $\sum a_k$ heisst

bedingt konvergent falls

$\sum a_k$ konv aber $\sum |a_k|$ divergent

Satz (Dirichlet) Falls $\sum a_k$

konv. absolute dann jede

Umordnung der Reihe konvergiert

mit denselben Grenzwert. Zudem

$\sum a_k \leq \sum |a_k|$

Satz (Riemann) Sei $\sum a_n$ eine

konvergente aber nicht abs. konv

Reihe (d.h bedingt konvergente Reihe)

Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

eine Umordnung der Reihe, die

gegen A konvergiert.

Alternierende Reihe

Satz (Leibniz). Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge, die monotone fallend ist mit $a_n \geq 0$ und $\lim a_n = 0$. Dann konvergiert die Alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k =: S$$

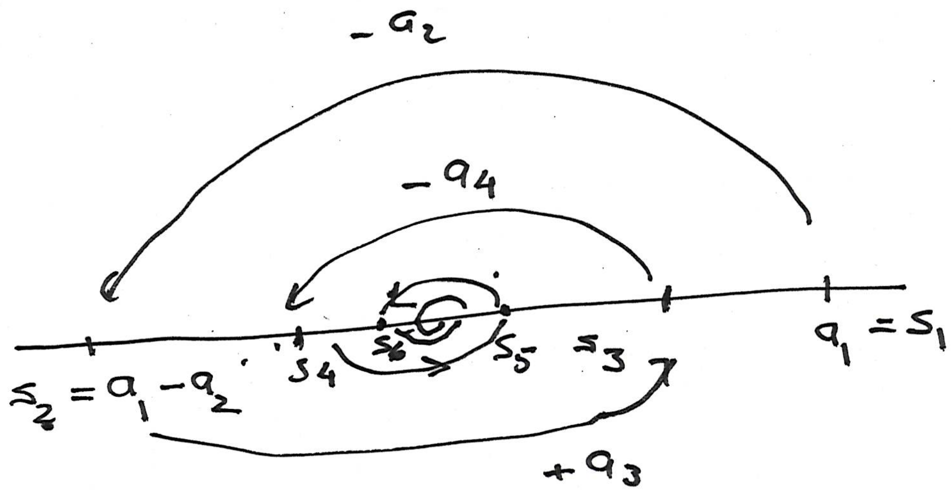
und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

Bsp Alternierende Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$ ist konvergent

aber nicht abs. konvergent

Beweis.



$$s_3 = s_2 + a_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a_1 + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{<0}.$$

$$s_4 = s_3 - a_4 = a_1 - a_2 + \underbrace{a_3 - a_4}. = s_2 + \underbrace{a_3 - a_4}_{>0}$$

Sei

$$S_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$= S_{2n-1} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n})}_{<0}$$

$$S_{2n+1} < S_{2n-1}$$

$$\boxed{(S_{2n+1})_{n\ge 1} \text{ ist mon. fallend.}}$$

$$S_{2n} = (a_1 - a_2 \dots - a_{2n-2}) + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= S_{2n-2} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{>0}$$

$$\Rightarrow S_{2n} > S_{2n-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(S_{2n})_{n\ge 1} \text{ ist mon. wachsend.}}$$

$$a_1 - a_2 = S_2 \le S_{2n} \le S_{2n-1} \le S_1 = a_1$$

$(S_{2n})_n$ und $(S_{2n+1})_n$ sind beschränkt.

Nach mon. konv satz, konvergiert beide Teilfolgen.

Da $S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$

Da $\lim a_n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S.$$

Dann folgt dass $\lim S_n$ existiert und ist gleich S.

Dies folgt aus dem folgenden Lemma

Lemma Sei (s_n) eine beschränkte Folge. Sei $(s_{2n})_{n\geq 1}$ die Teilfolge mit gerade Indizen und $(s_{2n+1})_{n\geq 1}$ die Teilfolge mit ungerade Indizen.

Falls $\lim s_{2n} = s = \lim s_{2n+1}$,

so konvergieren s_n mit Grenzwert s.

Satz (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n\geq 1$

Falls $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

dann konvergiert die absolute Reihe $\sum a_k$

Falls $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$,

divergiert die Reihe.

Bmk Falls $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert

$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. Dann

Falls $L<1$, $\sum a_k$ konv.

Falls $L>1$ $\sum a_k$ diver.

Falls $L=1$, versagt das Kriterium.

Bsp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right|$$

$$= \left|\underbrace{\frac{(n+1)!}{n!}}_{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Quot kriter. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konv.

Erinnerung: $\left(\sum a_k \text{ konv} \Longrightarrow \lim a_k = 0. \right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konv $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

$\Rightarrow$ n^n wächst schneller als $n!$.

Beweis (Quotientenkriterium)

Sei $c_n = \sup\left\{ \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| : k \geq n \right\}$.

c_n ist mon fallend.

$$\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim c_n = q_0 < 1$$

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit

$$q_0 < q < 1.$$

$\varepsilon = q - q_0$

Dann gilt für genügend gross

$N \in \mathbb{N}$,

$$|c_n - q_0| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Insbesondere

$$c_N < \varepsilon + q_0 = q.$$

Dann $\forall k \geq N$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq c_N < q.$$

Woraus folgt dass

$$|a_{k+1}| < q|a_k| \quad \forall k \geq N$$

$$|a_{k+2}| < q|a_{k+1}| < q^2|a_k|$$

Dann für $j \geq 1$

$$|a_{N+j}| \leq q|a_{N+j-1}|$$

$$\leq q^2 |a_{N+j-2}|$$

$$\ldots \leq q^j |a_N|.$$

$\cancel{\forall n \geq N+1}$

$$\leq \frac{q^{N+j}}{q^N} |a_N|$$

$\cancel{|a_n| \leq q^n a_N}$

$$\leq q^{N+j} \left|\frac{a_N}{q^N}\right|.$$

Wir haben gezeigt dass $\forall n \geq N+1$

$$|a_n| \leq q^n \left|\frac{a_N}{q^N}\right|$$

sei

$$\left|\frac{a_N}{q^N}\right| = M$$

Dann haben wir

$$|a_n| \leq M q^n \quad \forall n \geq N+1$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq M \sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$$

Da $q<1$ ist, $\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$

konvergiert

Deswegen konvergiert auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$

Bmk: In Quotientkriterium haben wir $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ für konvergenz und $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ für divergenz.

Warum? Man kann Folgen finden $(a_n), (b_n)$ so dass $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ und $\liminf \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < 1$ und $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, $\limsup \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| >$ aber $\sum a_n$ konv und $\sum b_n$ div

Bsp: Seien (a_n), (b_n) zwei Rekursiv def. Folgen.

$a_1 = 1$

$$a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} & \text{Falls } n = 3^k \text{ für ein } k \\ \frac{1}{2} a_{n-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

$a_1 = 1$	$a_9 = \frac{1}{16}$
$a_2 = \frac{1}{2}$	$a_{10} = \frac{1}{32}$
$a_3 = 1$	.
$a_4 = \frac{1}{2}$	
$a_5 = \frac{1}{4}$	
$a_6 = \frac{1}{8}$	
$a_7 = \frac{1}{16}$	
$a_8 = \frac{1}{32}$	

$$|a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$n \geq 4$

$$\sum_{n=4}^{\infty} |a_n| < \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

konvergent.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} 2 & \text{oder } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2 > 1$$

$b_1 := 1$ $\quad \liminf \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{2}$, $\limsup = 2.$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} b_{n-1} & n = 3^k \text{ für ein} \\ 2 b_{n-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$b_1 = 1$	$b_5 = 4$	$b_9 = 16$
$b_2 = 2$	$b_6 = 8$	$b_{10} = 32$
$b_3 = 1$	$b_7 = 16$	.
$b_4 = 2$	$b_8 = 32$	

$b_n \geq 1$ $\quad \sum b_n$ divergiert

* **Bsp:** Exponential Funktion.

Für $z \in \mathbb{C}$, betrachte

die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$(0! = 1)$

Für $z \neq 0$, $a_n = \frac{z^n}{n!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right|$$

$$= |z| \left|\frac{1}{n+1}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Für jede $z \in \mathbb{C}$, konvergiert

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Defn Wir definieren die **Exponentialfunktion** als

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.}$$

Bsp. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k}$$

$$a_k = \frac{z^k\, k!}{k^k}$$

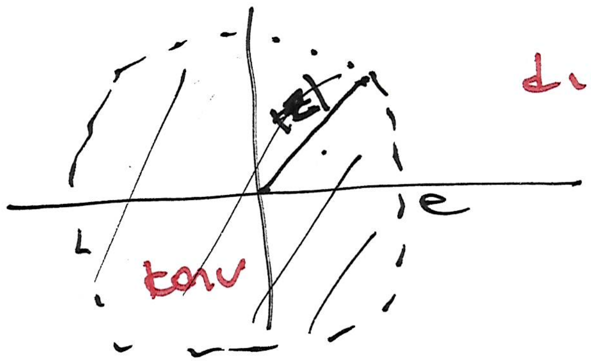
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}\,(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{z^k\, k!}\right| .$$

$$= |z| \underbrace{\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right|}_{\to 1/e} .$$

$$\to \frac{|z|}{e} .$$

Quot.-krit.: Falls $\frac{|z|}{e} < 1$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k\, k!}{k^k}$

und Falls $\frac{|z|}{e} > 1$, dann divergiert die Reihe



Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k q^k}_{a_k}$, $|q| < 1$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)\, q^{k+1}}{k\, q^k}\right| = \left|\frac{k+1}{k}\right| \cdot q .$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} q < 1 .$$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k q^k$ konvergiert mittels Quotientkrit.

Was ist die Summe?

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots$$

$$= q + q^2 + q^3 + q^4 +$$
$$+ q^2 + q^3 + q^4 +$$
$$+ q^3 + q^4$$
$$+ q^4$$
$$\vdots$$

$$= q(1+q+q^2+q^3+\cdots)$$
$$+ q^2(1+q+q^2+q^3+\cdots)$$
$$+ q^3(1+q+q^2\cdots)$$
$$\vdots$$

$$= \underbrace{\underbrace{(q+q^2+q^3+\cdots)}_{q(1+q^2+\cdots)}}_{\frac{q}{1-q}} \underbrace{(1+q+q^2+\cdots)}_{\frac{1}{1-q}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \frac{q}{(1-q)^2}.$$